Kolokwium poprawkowe — Funkcje Analityczne

18.01.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Oblicz część rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)}{(z-1)^4}\,dz,$$

gdzie

(a) γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem $S(0,1/2)$,

(b) γ jest dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A=(2,-1)$, $B=(2,1)$, $C=(0,0)$.

Rozwiązanie:

Na mocy wzoru Cauchy'ego, dla dowolnej drogi γ mamy

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)}{(z-1)^4}\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(1)\cdot f'''(1),$$

gdzie $f(z)=\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)$.

(a) W tym przypadku mamy $\mathrm{Ind}_\gamma(1)=0$, zatem

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)}{(z-1)^4}\,dz = 0.$$

(b) Mamy $\mathrm{Ind}_\gamma(1)=1$, zatem

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)}{(z-1)^4}\,dz = 2\pi i\cdot f'''(1).$$

Mamy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\frac{\pi}{4},\\ f''(z) &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\\ f'''(z) &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}z+i\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^3. \end{aligned}$$

Zatem

$$I := \int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z + i\right)}{(z-1)^4}\, dz = -\frac{\pi^4 i}{32} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right).$$

Aby znaleźć część rzeczywistą i urojoną powyższej całki zastosujemy następujący wzór, który pojawił się na wykładzie nr 3:

$$\cos(x + iy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \cdot \sinh(y),$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ oraz

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i \cdot \pi^4}{32} \cdot [\cos(\pi/4) \cdot \cosh(1) - i \sin(\pi/4) \cdot \sinh(1)] = \\ &= -\frac{i \cdot \pi^4}{32} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [\cosh(1) - i \sinh(1)] = \\ &= -\frac{\pi^4 \cdot \sqrt{2}}{64} \cdot \sinh(1) - i \cdot \frac{\pi^4 \cdot \sqrt{2}}{64} \cdot \cosh(1). \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathrm{Re}(I) = -\frac{\pi^4 \cdot \sqrt{2}}{64} \cdot \sinh(1), \quad \mathrm{Im}(I) = \frac{\pi^4 \cdot \sqrt{2}}{64} \cdot \cosh(1).$$

Zadanie 2 (10 p.)

Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus \{t \cdot i \in \mathbb{C} \colon t \in [0, 1]\}$.

(a) Znajdź obraz obszaru Ω przez odwzorowanie $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$, przy czym wybieramy gałąź pierwiastka określoną na zbiorze $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ spełniającą $\sqrt{-1} = i$.

Podpowiedź: Przedstaw odwzorowanie f jako złożenie trzech elementarnych odwzorowań holomorficznych.

(b) Znajdź konforemny dyfeomorfizm przekształcający obszar

$$\Omega_1 = D(0, 1) \setminus \{t \cdot i \in \mathbb{C} \colon t \in [0, 1]\}$$

na górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Rozwiązanie:

(a) Przedstawiamy $f(z) = (h_3 \circ h_2 \circ h_1)(z)$, gdzie $h_1(z) = z^2$, $h_2(z) = z + 1$, $h_3(z) = \sqrt{z}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} U_1 &= g_1(\Omega) = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty), \\ U_2 &= g_2(U_1) = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \\ U_3 &= g_3(U_2) = \mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Zatem $f(\Omega) = \mathbb{H}_+$.

(b) Aby znaleźć konforemny dyfeomorfizm spełniający warunki zadania, zauważmy, że wystarczy znaleźć homografię g, która przekształca obszar Ω_1 na obszar Ω.

Szukana homografia musiałaby spełniać $g(0) = i$, $g(i) = 0$ oraz przekształcać okrąg jednostkowy na prostą rzeczywistą. Wówczas, na mocy zasady symetrii otrzymamy $g(\infty) = -i$. Zatem $g(z) = -i \cdot \frac{z-i}{z+i}$. Zauważmy, że dla $t \in [0,1]$ mamy

$$g(t \cdot i) = i \cdot \frac{1-t}{t+1}.$$

Zatem $g(\{t \cdot i \colon t \in [0,1]\}) = \{t \cdot i \colon t \in [0,1]\}$ Ostatecznie $g(\Omega_1) = \Omega$, zatem złożenie $f \circ g$ jest szukanym odwzorowaniem.

Zadanie 3 (10 p.)

Rozważmy funkcję całkowitą $h \in H(\mathbb{C})$ daną wzorem

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

(a) Pokaż, że istnieje $R > 0$ takie, że na dysku $D(0,R)$ istnieje funkcja holomorficzna f, która spełnia tożsamość

$$\exp(f(z)) = h(z),$$

dla wszystkich $z \in D(0,R)$.

(b) Czy istnieje $R > 10^{100}$ spełniające warunki z poprzedniego punktu?

(c) Znajdź trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji f w szereg Taylora w punkcie $z_0 = 0$.
Uwaga: wartość $f(0)$ można wybrać na wiele różnych sposobów. Proszę wybrać jedną z tych możliwości.

Rozwiązanie:

(a) Biorąc $R = \pi$, widzimy, że na dysku $D(0,R)$ funkcja h nie ma zer, zatem $\frac{1}{h}$ jest holomorficzna na $D(0,R)$. Dysk $D(0,R)$ jest jednospójny, zatem istnieje na tym obszarze holomorficzna gałąź funkcji $\log(h(z))$. Dowolna z tych gałęzi będzie spełniała warunki zadania.

(b) Zauważmy, że $h(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$, zatem, gdyby istniało takie R, wówczas mielibyśmy

$$\exp(f(\pi)) = 0.$$

Jednakże $\exp(z) \neq 0$, dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem, nie istnieje $R > \pi$ spełniające warunek z pierwszego podpunktu.

(c) Najpierw zauważmy, że w odpowiednio małym otoczeniu $z_0 = 0$ mamy

$$\sin(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + O(z^5).$$

Zatem w odpowiednio małym otoczeniu zera zachodzi

$$h(z) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + O(z^4),$$

skąd wnioskujemy, że $h'(z) = 0$, $h''(0) = -\frac{1}{3}$ oraz $h'''(0) = 0$.

Podstawiając $z = 0$ w tożsamości definiującej f otrzymamy

$$\exp(f(0)) = 1,$$

zatem $f(0) = 2k\pi i$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Możemy wybrać $k = 0$, wówczas $f(0) = 0$.
Różniczkując obustronnie tożsamość otrzymamy

$$\exp(f(0)) \cdot f'(0) = h'(0) = 0.$$

Zatem $f'(0) = 0$.
Różniczkując ponownie otrzymamy

$$\exp(f(0)) \cdot (f'(0))^2 + \exp(f(0)) \cdot f''(0) = h''(0) = -\frac{1}{3},$$

zatem

$$f''(0) = -\frac{1}{3}.$$

Podsumowując

$$f(z) = \frac{1}{2!} \cdot \frac{-1}{3} \cdot z^2 + O(z^3) = -\frac{1}{3!} z^2 + O(z^3).$$

Zadanie 4 (10 p.)
Proszę wyznaczyć wszystkie funkcje całkowite f, które spełniają warunki:

- $f(0) = 0$, $f(1) = 2024$,
- dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ spełniona jest nierówność $|f(z) - f(w)| \geqslant |z - w|$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że drugi warunek mówi nam, że dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \geqslant 1.$$

W szczególności, $f'(z_0) \neq 0$. Zatem, funkcja $g(z) = \frac{1}{f'(z)}$ jest całkowita oraz $|g(z)| \leqslant 1$, dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$. Na mocy twierdzenia Liouville'a funkcja g musi być stała. Stąd wynika, że funkcja f' jest stała, a zatem $f(z) = Az + B$, dla pewnych $A, B \in \mathbb{C}$. Podstawiając wartości z pierwszego warunku otrzymamy $A = 2024$ oraz $B = 0$. Zatem, jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja $f(z) = 2024 \cdot z$.